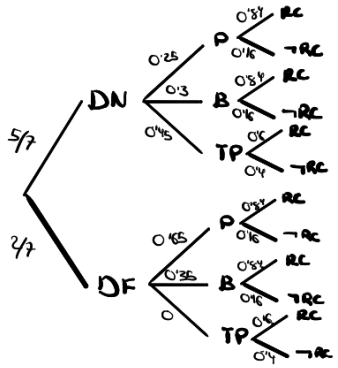
PARCIAL 1 - PRIMAVERA 2025

Assignatura: Probabilitat i estadística
Grau: Enginyeria informàtica
Data: 07/04/2026

BLOC A. Un grup d'estudiants universitaris està desenvolupant un algoritme per desplaçar-se (similar a Google Maps). L'algoritme considera 3 tipus de transports: a peu (P), bicicleta (B) i transport públic (TP). Com que l'algoritme encara està en fase de proves, l'algoritme proporciona la ruta correcta (RC) amb probabilitats 0.84, 0.84 i 0.6 respectivament al tipus de transport. La proporció d'utilitzar un d'aquests transports depèn de si és un dia feiner (DN): (0.25, 0.3, 0.45), o festiu (DF): (0.65, 0.35, 0), respectivament per a P, B i TP. Suposeu que tractem setmanes normals, de cinc dies feiners i dos festius.

1. Representeu l'arbre d'esdeveniments de la situació exposada indicant les probabilitats en les respectives branques (Tingueu en compte que l'arbre tindrà tres nivells; empreu els noms dels esdeveniments com estan a l'enunciat). [1pt.]



2. És l'esdeveniment d'obtenir la ruta correcta independent del tipus de dia? Justifiqueu formalment la resposta. [1.5pt.]

[0.25 pt.]
Volem comprovar si la igualtat $P(RC|DN) = P(RC|DF)$ és certa o no. Es comprova cada cas:

[0.75 pt.]
Cas DN:
$P(RC|DN) = P(RC \mid P) \cdot P(P \mid DN) + P(RC \mid B) \cdot P(B \mid DN) + P(RC \mid TP) \cdot P(TP \mid DN) = 0,25 \cdot 0,84 + 0,3 \cdot 0,84 + 0,45 \cdot 0,6 = 0,732$

Cas DF:
$P(RC|DF) = P(RC \mid P) \cdot P(P \mid DF) + P(RC \mid B) \cdot P(B \mid DF) + P(RC \mid TP) \cdot P(TP \mid DF) = 0,65 \cdot 0,84 + 0,35 \cdot 0,84 + 0 \cdot 0,6 = 0,84$

[0.5 pt.]
Com que les probabilitats no són equivalents, els esdeveniments no són independents, de manera que la probabilitat d'obtenir la ruta correcta sí depèn del tipus de dia.

3. Aquest any, l'1 de maig (que és festiu) cau en divendres. Quina és la probabilitat d'utilitzar el transport públic la setmana del 27 d'abril al 3 de maig? Com canvia respecte a

una setmana normal? [1pt.]

[0.25 pt.]

$$P(TP) = P(DN)\,P(TP \mid DN) + P(DF)\,P(TP \mid DF)$$

[0.5 pt.]
En una setmana normal: $P(TP) = \frac{5}{7} \cdot 0,45 + \frac{2}{7} \cdot 0 = 0,321$
En una setmana amb un festiu extra: $P(TP) = \frac{4}{7} \cdot 0,45 + \frac{3}{7} \cdot 0 = 0,257$

[0.25 pt.]
La probabilitat dismiueix 0.064 al incorporar un dia festiu a la setmana.

4. Si sabem que l'usuari s'ha desplaçat a peu o amb bicicleta, quina és la probabilitat de que la ruta proporcionada per l'algoritme sigui la correcta? [1.5pt.]

[0.75 pt.]
Volem calcular el següent: $P(RC \mid P \cup B) = \frac{P(RC \cap (P \cup B))}{P(P \cup B)}$ i com que els esdeveniments **P** i **B** són disjunts, ho podem reescriure$P(RC \cap (P \cup B))$ com: $P(RC \cap P) + P(RC \cap B)$

[0.5 pt.]
Treballant amb setmana normal (5 DN, 2 DF):

$P(P) = \frac{5}{7} \cdot 0.25 + \frac{2}{7} \cdot 0.65 = 0.364$
$P(B) = \frac{5}{7} \cdot 0.3 + \frac{2}{7} \cdot 0.35 = 0.314$
$P(P \cup B) = 0.364 + 0.314 = 0.678$

Ara calculem les interseccions:
$P(RC \cap P) = P(P) \cdot P(RC \mid P) = 0.364 \cdot 0.84 = 0.306$
$P(RC \cap B) = P(B) \cdot P(RC \mid B) = 0.314 \cdot 0.84 = 0.264$
$P(RC \cap (P \cup B)) = 0.306 + 0.264 = 0.57$

Finalment: $P(RC \mid P \cup B) = \frac{0.57}{0.678} = 0.84$

[0.25 pt.]
Com que les dues maneres de desplaçar-se retornen la mateixa probabilitat, independentment del tipus de dia, la probabilitat serà la que ens diu l'anunciat.

5. Si un usuari ha seguit correctament la ruta, quina és la probabilitat que s'hagi desplaçat amb bicicleta? [1pt.]

[0.25 pt.]
Volem calcular $P(B|RC) = \frac{P(B \cap RC)}{P(RC)}$

[0.5 pt.]
Es calcula cada part per separat:

$P(B \cap RC) = P(B \cap RC \cap DN) + P(B \cap RC \cap DF) = \frac{5}{7} \cdot 0.3 \cdot 0.84 + \frac{2}{7} \cdot 0.35 \cdot 0.84 = 0.264$
$P(RC) = P(RC|DN)P(DN) + P(RC|DF)P(DF) = \frac{5}{7} \cdot 0.732 + \frac{2}{7} \cdot 0.84 = 0.763$

[0.25 pt.]
Per tant:
$P(B \mid RC) = \frac{0.264}{0.763} \approx 0.346$

Definim amb la variable aleatòria X el cost que suposa al viatger l'ús d'un tipus o altre de transport (0.25€ a peu, 0.55€ amb bicicleta, 1.5€ amb transport públic), i amb la variable aleatòria Y si es proporciona una ruta correcta (1) o no (0).

6. Construïu la taula de probabilitat conjunta i indiqueu justificadament si les variables són o no són independents. [1.5pt.]

[0.75 pt.]
Distribució de X:

$$P_X(0.25) = P(P) = 0.364, \quad P_X(0.55) = P(B) = 0.314, \quad P_X(1.5) = P(TP) = 0.321$$

[0.75 pt.]
Taula conjunta:

$X \backslash Y$	1	0
0.25	0.305	0.058
0.55	0.264	0.05
1.5	0.193	0.128

Comprovem independència amb un cas:

$$P_{X,Y}(0.25, 1) = P(P \cap RC) = 0.306 \neq P(P) \cdot P(RC) = 0.364 \cdot 0.763 = 0.278$$

Per tant, les variables **no són independents**.

7. Calculeu l'esperança de X. Interpreteu el resultat trobat. [1pt.]

[0.5 pt.]

$$E(X) = \sum x \cdot P_X(x)$$

[0.5 pt.]

$$E(X) = 0.25 \cdot 0.364 + 0.55 \cdot 0.314 + 1.5 \cdot 0.321$$

$$E(X) \approx 0.746$$

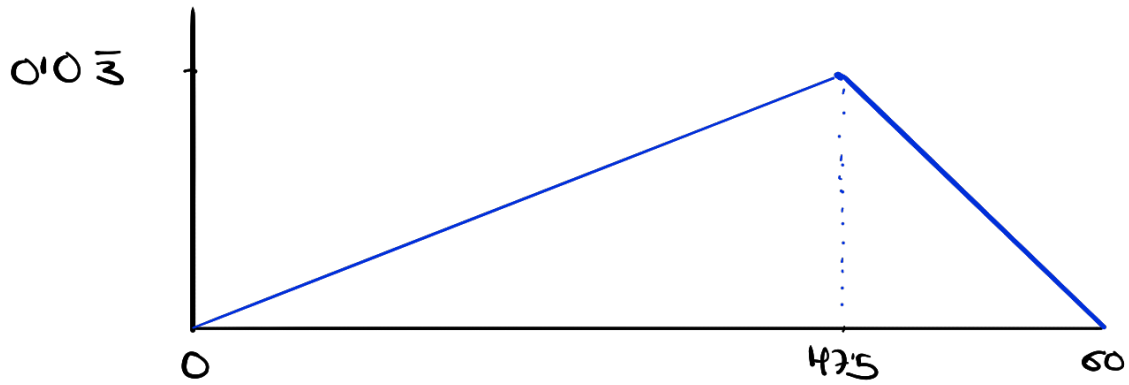
Obtenim que el cost esperat per viatge d'un usuari és de 76,6 cèntims d'euro.

Un usuari comet un error durant un trajecte de 60 minuts en seguir les instruccions. El moment (en minuts) en què es comet aquest error és determinat per la següent funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{1425} & \text{si } 0 \le x \le 47.5, \\ \dfrac{60 - x}{375} & \text{si } 47.5 < x \le 60, \\ 0 & \text{si } x > 60. \end{cases}$$

8. Representeu la funció de densitat de la variable anterior. Quina és la probabilitat de cometre un error al seguiment durant els 10 minuts que transcorren entre el minut 40 i el 50? [1.5pt.]

[0.5 pt.]



[0.5 pt.]
La probabilitat es calcula integrant la funció de densitat sobre l'interval:

$$P(40 \le X \le 50) = \int_{40}^{50} f(x)\,dx$$

Com que la funció és a trossos, dividim l'interval en dos:

$$\int_{40}^{47.5} \frac{x}{1425}\,dx + \int_{47.5}^{50} \frac{60 - x}{375}\,dx$$

[0.5 pt.]
Calculem cada integral:

$$\int_{40}^{47.5} \frac{x}{1425}\,dx = \frac{1}{1425}\int_{40}^{47.5} x\,dx = \frac{1}{1425}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_{40}^{47.5} = \frac{47.5^2 - 40^2}{2 \cdot 1425} = \frac{2256.25 - 1600}{2850} \approx 0.229$$

$$\int_{47.5}^{50} \frac{60 - x}{375}\,dx = \frac{1}{375}\int_{47.5}^{50} (60 - x)\,dx = \frac{1}{375}\left[60x - \frac{x^2}{2}\right]_{47.5}^{50} = \frac{1750 - 1721.875}{375} \approx 0.075$$

Finalment:

$$P(40 \leq X \leq 50) \approx 0.229 + 0.075 = 0.304$$

La probabilitat és 0.304 aproximadament.

NOM: _____ COGNOM: _____

Problema 2 (Bloc B)

Definiu en cada apartat les variables, models i paràmetres adequats. Expliciteu i justifiqueu els càlculs.

Una empresa de logística vol optimitzar els seus processos d'entrega i control de qualitat. Amb aquest objectiu, duu a terme diferents estudis estadístics per analitzar el comportament aleatori de diverses variables del seu sistema logístic.

En primer lloc, l'empresa centra l'anàlisi en el control de qualitat dels paquets. Se sap que aproximadament el 1% dels paquets gestionats en un centre logístic presenten algun defecte. Per estudiar aquesta situació, es selecciona una mostra aleatòria de 200 paquets i s'analitza el nombre de paquets defectuosos presents en la mostra.

1. (a) Trobeu l'esperança i la desviació típica del nombre de paquets defectuosos. (0.5 punts)

   $X =$ "nombre de paquets defectuosos", $X \sim Bin(n = 200, p = 0.01)$

   $\mathbb{E}(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0.01 = \mathbf{2}$

   $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 200 \cdot 0.01 \cdot 0.99 = 1.98$, $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1.98} = \mathbf{1.407}$

   (b) Calculeu la probabilitat que en el lot aparegui més d'un paquet defectuós. (0.5 punts)

   $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(0) + P(1)]$

   $P(0) = \binom{200}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{200} = 0.99^{200} = 0.134$

   $P(1) = \binom{200}{1} \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^{200-1} = 200 \cdot 0.01 \cdot 0.99^{199} = 0.271$

   $P(X > 1) = 1 - 0.134 - 0.271 = \mathbf{0.595}$

2. (a) Quina és la probabilitat que el primer paquet defectuós aparegui en el 100è paquet analitzat? (1 punt)

   $Y =$ "nombre de paquets analitzats fins trobar el primer defectuós", $Y \sim Geom(p = 0.01)$

   $P(Y = 100) = (1-p)^{100-1} \cdot p = 0.99^{99} \cdot 0.01 = \mathbf{0.0037}$

   (b) Trobeu la probabilitat que no veiem cap paquet defectuós en els primers 50 paquets analitzats. (0.5 punts)

   $P(Y > 50) = P($els primers 50 paquets no són defectuosos$) = (1-p)^{50} = 0.99^{50} = \mathbf{0.605}$

   Alternativament, $X =$ "nombre de paquets defectuosos en 50 analitzats", $X \sim Bin(50, 0.01)$.

   Aleshores busquem $P(X = 0) = \binom{50}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{50} = \mathbf{0.605}$

3. Els paquets s'organitzen en grups de 16 per ficar-los en caixes i distribuir-los. Si els 16 paquets del lot són correctes es preparen per carregar-los al camió. Quants lots de 16 paquets s'esperen preparar i carregar fins a trobar-ne un que no es pot pujar al camió? (1.5 punts)

   $W =$ "nombre de lots fins a trobar el primer amb algun paquet defectuós", $W \sim Geom(p)$, però compte perquè W no considera el darrer lot, el que conté algun paquet defectuós (no compta els intents, només els *fracassos*).

   Anem a calcular el paràmetre p:

   $p = P($lot incorrecte$) = 1 - P($cap paquet del lot és defectuós$) = 1 - (1-0.01)^{16} = 0.148.$

   Aleshores, $\mathbb{E}(W) = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-0.148}{0.148} = \mathbf{5.76}$

$pnorm(0.50) = 0.69146$	$pnorm(0.80) = 0.78814$	$pnorm(1.00) = 0.84134$	$qnorm(0.6) = 0.25335$	$qnorm(0.7) = 0.52440$
$pnorm(1.25) = 0.89435$	$pnorm(1.29) = 0.90147$	$pnorm(1.38) = 0.91621$	$qnorm(0.8) = 0.84162$	$qnorm(0.9) = 1.28155$
$pnorm(1.50) = 0.93319$	$pnorm(2.00) = 0.97725$	$pnorm(2.10) = 0.98214$	$qnorm(0.95) = 1.64485$	$qnorm(0.975) = 1.96$

El següent camp on es centra l'anàlisi en l'empresa de gestió és en l'arribada de comandes. Les comandes arriben de manera aleatòria amb una mitjana de 4 per hora.

4. Durant dues hores, el responsable observa que el volum de feina ha estat moderat. Quina és la probabilitat que hagin arribat exactament 6 comandes en aquest interval? (1 punt)

   $R =$ "nombre de comandes en 1 hora", $R \sim P(\lambda = 4)$

   $R' =$ "nombre de comandes en 2 hores", $R' \sim P(\lambda = 2 \cdot 4 = 8)$

   $P(R' = 6) = \frac{\lambda^6 e^{-\lambda}}{6!} = \frac{8^6 e^{-8}}{6!} = \mathbf{0.122}$

Passat un cert temps sense que hagi arribat cap comanda, el responsable del magatzem comença a preocupar-se.

5. Sabent que durant els primers 30 minuts hi ha hagut zero comandes, quina és la probabilitat que encara hagi d'esperar més de 30 minuts addicionals fins a la primera arribada? (1.5 punts)

   $T =$ "temps (en hores) entre dues comandes", $T \sim Exp(\lambda = 4)$

   Per la propietat de no memòria del model exponencial, tenim que

   $P(T > 1|T > 0.50) = P(T > 0.5) = 1 - P(T \leq 0.5) = 1 - F_T(0.5) = 1 - (1 - e^{-4 \cdot 0.5}) = e^{-2} = \mathbf{0.135}$

Per tal de fer un estudi més global del funcionament del magatzem, el responsable decideix analitzar el nombre de comandes rebudes al llarg de molts dies d'observació. Així doncs, es registren un total de 60 hores, considerant totes les observacions independents entre elles.

6. Aproximeu la probabilitat que el nombre total de comandes rebudes sigui superior a 260. (1.5 punts)

   Tenim $R_i =$ "nombre de comandes en la i-èssima hora", $R_i \sim P(\lambda = 4)$ amb $\mathbb{E}(R_i) = 4$ i $\sigma = \sqrt{4} = 2$.

   Definim la variable $S_{60} = R_1 + ... + R_{60}$. Com que les R_i són i.i.d podem aplicar el TCL i tenim que $S_{60} \sim N(\mu = 4 \cdot 60 = 240, \sigma = 2 \cdot \sqrt{60} = 15.49)$

   $P(S_{60} > 260) = P\left(Z > \frac{260-240}{\sqrt{240}}\right) = P(Z > 1.29) = 1 - P(Z \leq 1.29) = 1 - 0.9015 = \mathbf{0.0985}$

7. Determineu el nombre mínim d'hores d'observació necessàries perquè, amb una probabilitat del 95%, el nombre total de comandes rebudes es desviï en menys de 30 unitats del seu valor esperat. (2 punts)

   $S_n \sim N(4n, 2\sqrt{n})$

   Busquem n tal que $P(|S_n - 4n| < 30) = 0.95$. Si ho estandaritzem tenim, $P(|\frac{S_n - 4n}{2\sqrt{n}}| < \frac{30}{2\sqrt{n}})$.

   És a dir, $P(-\frac{30}{2\sqrt{n}} < Z < \frac{30}{2\sqrt{n}}) = 0.95$, on $Z \sim N(0, 1)$.

   Per simetria de la normal, això equival a buscar n tal que $P(Z \leq \frac{30}{2\sqrt{n}}) = 0.975$.

   Aleshores tenim que $\frac{30}{2\sqrt{n}} = z_{0.975} = 1.96$. Aïllant, obtenim $n = (\frac{30}{2 \cdot 1.96})^2 = 58.57 \Rightarrow \mathbf{n = 59}$